Matemáticas I **4–Setiembre–08**

1. Demuestra, por inducción, que

$$1 - 4 + 9 - \cdots + (-1)^{n-1}n^2 = (-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2} \quad \text{(2 puntos)}$$

   Solución:

   Si $n = 1$, ambos miembros dan 1.

   Supongamos cierta la igualdad para $n \geq 1$ y probémosla para $n + 1$:

$$1-4+9-\cdots+(-1)^{n-1}n^2+(-1)^n(n+1)^2 = (-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}+(-1)^n(n+1)^2$$

$$= (-1)^n(n+1)\left(\frac{-n}{2} + (n+1)\right) = (-1)^n(n+1)\frac{n+2}{2} = (-1)^n\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

2. En el conjunto $\mathbf{Z}$ de los números enteros se fija un número $z > 2$ y se considera la relación

$$R = \{(a, b) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \mid |b - a| > z\}$$

   ¿Es una relación reflexiva, simétrica, antisimétrica, transitiva? (2 puntos).

   Solución:

   La relación no es reflexiva, pues $|a - a| = 0 \not> z$

   Es simétrica pues $|b - a| > z \iff |a - b| > z$

   No es antisimétrica pues $(0, z + 1) \in R, (z + 1, 0) \in R$, pero $0 \neq z + 1$.

   Finalmente, tampoco es transitiva pues $(0, z + 3) \in R, (z + 3, 2) \in R$, pero $(0, 2) \notin R$, pues $|2| = 2 < z$.

3. Describe en el lenguaje que estimes oportuno el algoritmo de interpolación de Newton. Aplícalo al caso

$$(-2, -5), (-1, -6), (0, 1), (1, 4), (2, 15)$$

   (10 puntos)

   Solución: Puede tomarse como modelo el procediminto de la página 65 del libro de texto.

   Para el caso,

$$(-2, -5), (-1, -6), (0, 1), (1, 4), (2, 15)$$

k	a_k	b_k	G	u	h	f
0	-2	-5	1			-5
1	-1	-6	$x+2$	1	-1	$-x-7$
2	0	1	$(x+2)(x+1)$	1/2	4	$1+11x+4x^2$
3	1	4	$(x+2)(x+1)x$	1/6	-2	$-2x^3-2\,x^2+7\,x+1$
4	2	15	$(x+2)(x+1)x(x-1)$	1/24	1	$x^4-3\,x^2+5\,x+1$

se obtiene

$$x^4-3\,x^2+5\,x+1$$

Recuerde el navegante que puede haber utilizado otro método pero, al ser de grado 4 y tener 5 puntos, el polinomio resultado es único.

4. Describe en el lenguaje que estimes oportuno un procedimiento que tome como entrada una matriz A y dé como salida una matriz P tal que $P^{-1}AP = D$ es diagonal o la imposibilidad de encontrar tales P y D. Aplícalo a la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (10 puntos)

   Solución: Puede tomarse como modelo el procedimiento de la página 101 del libro de texto.

   Para el caso particular de la matriz A, $|xI-A| = x^3-7\,x^2+10\,x = x(x-2)(x-5)$. Ahora,

$$\dim V(0) = 3 - \operatorname{rang}(A) = 3-2 = 1$$

$$\dim V(2) = 3 - \operatorname{rang}(2I-A) = 3-2 = 1$$

$$\dim V(5) = 3 - \operatorname{rang}(5I-A) = 3-2 = 1$$

   Además,

$$V(0) =< (0,-1,1) > \quad V(2) =< (-1,1,0) > \quad V(5) =< (5,7,3) >$$

   Por tanto,

$$P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 \\ -1 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad D = \operatorname{diag}[0,2,5]$$

5. En el plano euclídeo $\mathbf{R}^2$ se considera la afinidad φ de ecuación

$$Y = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{pmatrix} X$$

   y la simetría ortogonal σ de eje la recta de ecuación $x = y$. Se pide

   (a) Probar que φ es un movimiento (1 punto)

   (b) Elementos notables de φ (1.5 puntos)

   (c) Ecuación de $h = \varphi \circ \sigma$ (1.5 puntos)

   (d) Probar que h es un movimiento (1 punto)

(e) Elementos notables de h (2.5 puntos)

(f) Ecuaciones implícitas de la imagen, por h, de la recta $y = 1$ (2.5 puntos)

Solución:

(a)
$$\begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{pmatrix} = I_2$$

(b) Sean G, g las matrices de la ecuación. Entonces,
$$\text{rang}(I - G) = 2$$
por tanto, se trata de un giro de centro
$$(I - G)X = g \sim \cdots \sim (-1/2, -3/2)$$
El ángulo de giro es arccos(3/5) en el cuarto cuadrante, pues el seno es negativo.

(c) Para la ecuación de h necesitamos la de σ: puesto que el origen está en el eje de simetría, la ecuación es de la forma $Y = SX$ y para calcular S obtenemos los simétricos de los dos puntos fundamentales:
Es claro geométricamente[1] que A_1 se transforma en A_2, y, por tanto, A_2 en A_1. En definitiva la matriz S es $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
La ecuación de h se obtiene de
$$X \hookrightarrow SX \hookrightarrow g + G(SX)$$
es decir,
$$Y = g + (GS)X$$
Operando,
$$GS = \begin{pmatrix} 4/5 & 3/5 \\ 3/5 & -4/5 \end{pmatrix}$$

(d)
$$(GS)^t(GS) = S^tG^tGS = S^tS = I_3$$

(e)
$$\text{rang}(I - GS) = 1 < 2 = \text{rang}(I - GS|g)$$
Por tanto, se trata de una simetría axial seguida de una traslación paralela al eje de simetría.
El vector normal del eje de simetría se lee de
$$(I - GS)X = (0) \Longrightarrow \cdots \Longrightarrow x - 3y = 0$$

[1] el lector puede hacer los cálculos

Es decir, el vector normal del eje es $u = (1, -3)$. Ahora,

$$< u, g + (GS - I)X >= 0 \Longrightarrow x - 3y = 2$$

que es la ecuación del eje de simetría. Para el vector de traslación, tomamos el punto $P = (2, 0)$ en el eje y calculamos su imagen, obteniendo $h(P) = (13/5, 1/5)$. Por tanto, el vector de traslación es $(3/5, 1/5)$.

(f) La imagen de una recta por un movimiento es una recta. Tomamos pues dos puntos $P(0, 1)$, $Q(1, 1)$ en la recta dada y calculamos sus imágenes

$$g(P) = (1, -1)^t + \begin{pmatrix} 4/5 & 3/5 \\ 3/5 & -4/5 \end{pmatrix} (0, 1)^t = (8/5, -9/5)^t$$

$$g(Q) = (1, -1)^t + \begin{pmatrix} 4/5 & 3/5 \\ 3/5 & -4/5 \end{pmatrix} (1, 1)^t = (12/5, -6/5)^t$$

Y la ecuación de la recta imagen se deduce de

$$\text{rang} \begin{pmatrix} x - 8/5 & y + 9/5 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = 1$$

Es decir,

$$15x + 20y + 12 = 0$$